उत्तराखण्ड विद्यालयी शिक्षा परिषद्, रामनगर (नैनीताल)	इण्टरमीडिएट परीक्षा 'अ' (उत्तराखण्ड) 12 पन्ने	+वे1+वे2+कु

प्रश्न 1 का उत्तर

उत्तर (क)

$\because \quad f(x) = x^2$

चूँकि ऋणात्मक सं० -1 तथा धनात्मक सं० 1 के लिये ⇒

$f(-1) = 1$
$f(1) = 1$ } समान है। एकैकी नहीं।

तथा $x \in R$ (वास्तविक सं०) में ऋणात्मक सं० परिसर में सम्मिलित नहीं होंगी।

$y = x^2$

$x = \sqrt{y}$ यदि $y = -1$ आच्छादी नहीं

$x =$ काल्पनिक सं०

(IV) "f न तो एकैकी है न ही आच्छादक है" सही है।

उत्तर (ख)

$\tan^{-1}\left(\tan\frac{7\pi}{6}\right)$

$= \tan^{-1}\left[\tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)\right]$ III^rd चतुर्थांश

$= \tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

P.T.O.

$= \frac{\pi}{6}$

विकल्प (i) $\pi/6$ सही है।

उत्तर (ग)

$A_{3\times5}$ में अवयव = 15

विकल्प (iv) 15 सही है।

उत्तर (घ)

$$y = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$$

→ माना $x = \tan\theta$

$$y = \sin^{-1}\left[\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right]$$

$$= \sin^{-1}[\sin 2\theta]$$

$\because \sin 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$

$= 2\theta$

$y = 2\tan^{-1}x$

x के सापेक्ष अवकलन

$$\frac{dy}{dx} = 2\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{1+x^2}$$

विकल्प (iii) $\frac{2}{1+x^2}$ सही है।

उत्तर (ड़)

$$I = \int \cos^2 x \cdot dx$$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$2\cos^2 x = \cos 2x + 1$

$\cos^2 x = \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx + \frac{1}{2}\int dx$$

$$I = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) + \frac{x}{2} + C$$

$$I = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

विकल्प (ii) $\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C$ सही है।

उत्तर (च)

$$\frac{ydx - xdy}{y} = 0$$

P.T.O.

$$\frac{y}{y}dx - \frac{x}{y}dy = 0$$

$$dx = \frac{x}{y}dy$$

$$\frac{1}{x}dx = \frac{1}{y}dy$$

समाकलन करनेपर

$$\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{1}{x}dx$$

$$\log y = \log x + \log c$$

$$\log y = \log (c \cdot x)$$

$$\boxed{\log m + \log n = \log mn}$$

$$y = cx$$

विकल्प (i) $y = cx$ सही है।

उत्तर (ह)

x अक्ष के द्वारा बनाये गये कोण,

x अक्ष के साथ $\alpha = 0^\circ$

y अक्ष के साथ $\beta = 90^\circ$

z अक्ष के साथ $\gamma = 90^\circ$

$l = \cos\alpha$, $m = \cos\beta$, $n = \cos\gamma$

$= \cos 0^\circ$ $= \cos 90^\circ$ $= \cos 90^\circ$

$l = 1$ $m = 0$ $= 0$

विकल्प (iv) (1, 0, 0) सही है।

उत्तर (ट ज)

$P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{3}{5}$ $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$
$$= \frac{1/5}{3/5}$$
$$= \frac{1}{3}$$

विकल्प (ii) 1/3 सही है।

उत्तर (झ)

विकल्प (ii) A व R दोनों सही हैं, R, A की सही व्याख्या नहीं करता है।

उत्तर (ञ)

$\overrightarrow{AB} = -\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}$

$\rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1+4+36} = \sqrt{41}$

$|\overrightarrow{AB}|^2 = 41$

$\overrightarrow{BC} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$

$|\overrightarrow{BC}|^2 = 6$

P.T.O

$$\overrightarrow{AC} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4+9+25}$$
$$= \sqrt{35}$$

$$|\overrightarrow{AC}|^2 = 35$$

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2$$

विकल्प (i) A व R दोनों सही हैं तथा R, A की सही व्याख्या करता है। सही है।

प्रश्न 2 का उत्तर

माना $v = \sin^2 x$

$u = e^{\sin x}$

हमें ज्ञात करना है।

$$\frac{d(\sin^2 x)}{d(e^{\sin x})} = \frac{dv}{du}$$

→ $v = \sin^2 x$

x के सापेक्ष अवकलन

$$\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin^2 x)$$

$$= 2\sin x \frac{d}{dx}(\cos \sin x)$$

$$\frac{dv}{dx} = 2\sin x \cos x \quad —①$$

→ $\because \quad u = e^{\sin x}$

log लेने पर

$$\log u = \log . (e^{\sin x})$$

$$= \sin x \cdot \log_e e$$

$$\log u = \sin x$$

x के सापेक्ष अवकलन

$$\frac{1}{u} \frac{du}{dx} = \cos x$$

$$\frac{du}{dx} = u \cos x$$

$$\frac{du}{dx} = e^{\sin x} \cdot \cos x \quad —②$$

समी० ① को ② से भाग

$$\frac{dv/dx}{du/dx} = \frac{2\sin x \cdot \cos x}{e^{\sin x} \cdot \cos x}$$

$$\boxed{\frac{dv}{dx} = \frac{2\sin x}{e^{\sin x}}}$$

$e^{\sin x}$ के सापेक्ष $\sin^2 x$ का अवकलन

$$= \frac{2\sin x}{e^{\sin x}}$$

P.T.O.

प्रश्न 3 का उत्तर

$y = \log x$

x के सापेक्ष अवकलन

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\log x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

पुनः x के सापेक्ष अवकलन

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(x^{-1})$$

$$= -1\, x^{-1-1}$$

$$= -1\, x^{-2}$$

$$= \frac{-1}{x^2}$$

द्वितीय कोटि का अवकलज $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{-1}{x^2}$

प्रश्न 4 का उत्तर

$$I = \int \frac{1 - x^3}{x^2}\, dx$$

$$= \int \frac{1}{x^2}\, dx - \int \frac{x^3}{x^2}\, dx$$

$$= \int x^{-2} dx - \int x dx$$

$$= \frac{x^{-2+1}}{(-2+1)} - \frac{x^{1+1}}{(1+1)} + C$$

$$= \frac{x^{-1}}{-1} - \frac{x^2}{2} + C$$

$$= \frac{-1}{x} - \frac{x^2}{2} + C$$

$$\boxed{\int \frac{1-x^3}{x^2} dx = \frac{-1}{x} - \frac{x^2}{2} + C}$$

प्रश्न 5 का उत्तर

$$I = \int x \cdot e^x dx$$

$$= x \cdot \int e^x dx - \int \frac{d}{dx}(x) \int e^x \cdot dx \cdot dx$$

$$= xe^x - \int 1 \cdot e^x dx$$

$$= xe^x - e^x + C$$

$$\boxed{I = xe^x - e^x + C}$$

प्रश्न 6 का उत्तर

दी गयी अवकल समीकरण,

P.T.O.

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + y^4 = 0$$

कोटि =	3
घात =	2

प्रश्न 7 का उत्तर

$\vec{a} = \hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}$
$\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k})(3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})$
$= 3 + 8 + 3$
$= 14$

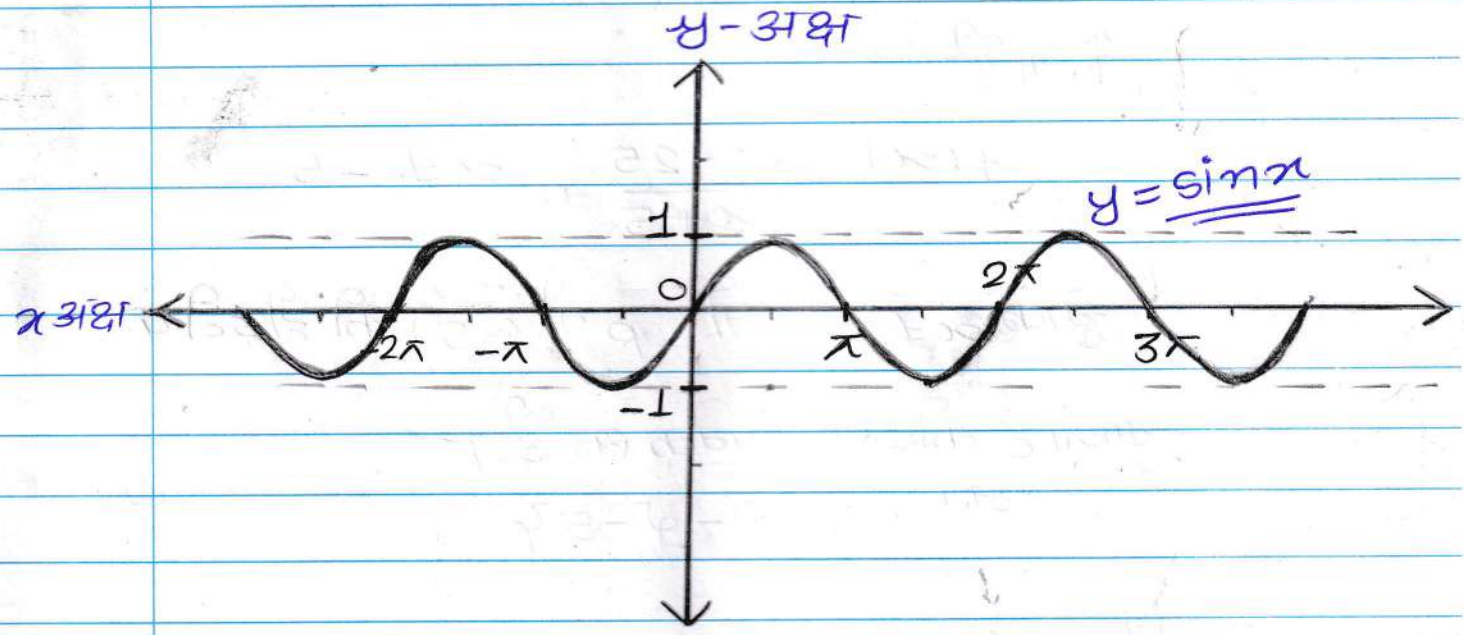
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 14$

प्रश्न 8 का उत्तर

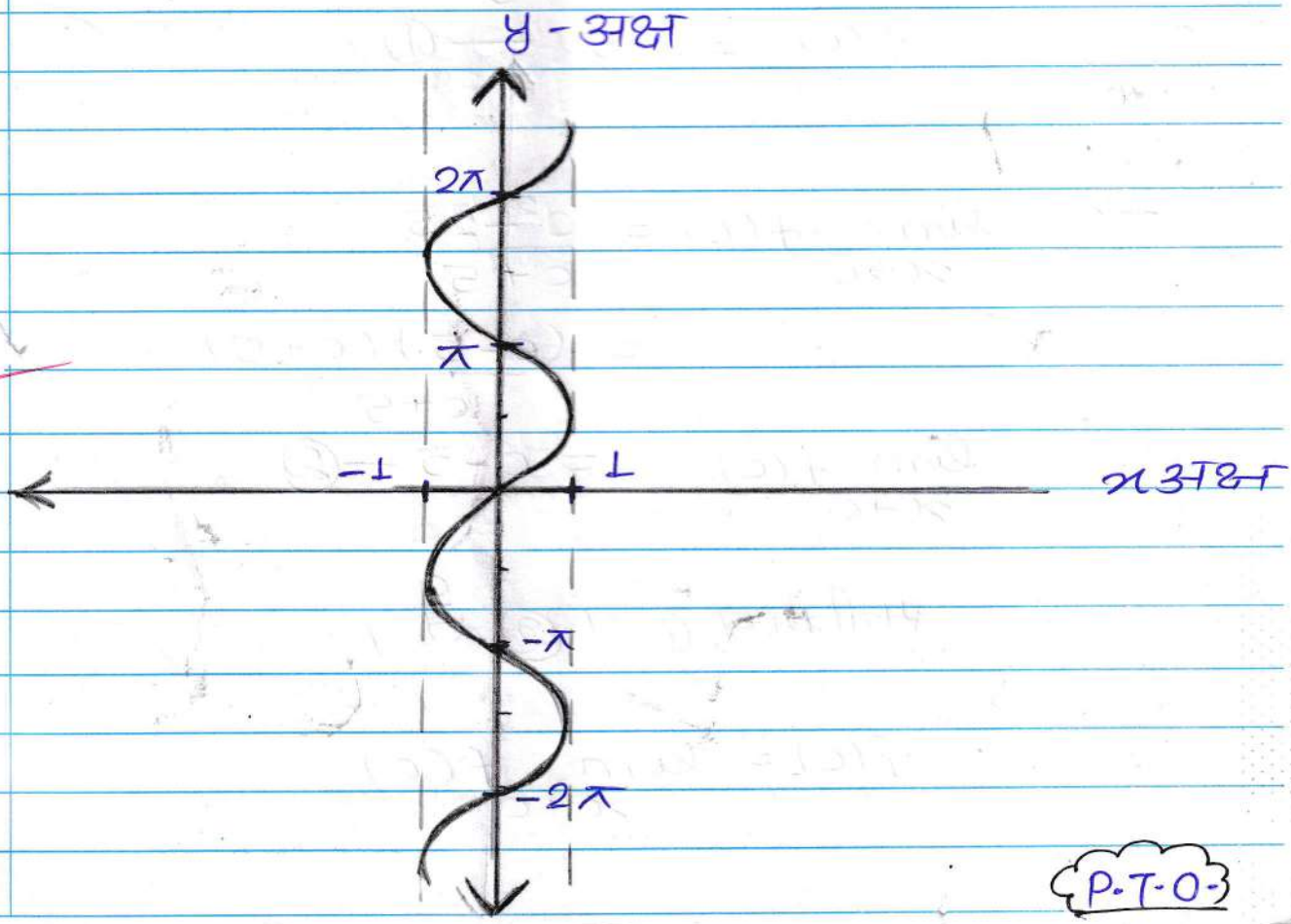
आलेख खींचना है जब

$y = \sin x$
$y = \sin^{-1} x$

$y = \sin x$ का ग्राफ →



$y = \sin^{-1} x$ का ग्राफ →



P.T.O.

प्रश्न 9 का उत्तर

दिया है

$$f(x) = \frac{x^2-25}{x+5}, \quad x \neq -5$$

चूँकि $x \neq -5$ तो R में (-5) की हीडनेघर

माना c कोई वास्तविक सं. है।

जब $c = R - \{-5\}$

→ तो $$f(c) = \frac{c^2-25}{c+5}$$

$$= \frac{(c-5)(c+5)}{c+5}$$

$$f(c) = c-5 \quad \text{— ①}$$

→ $$\lim_{x \to c} f(c) = \frac{c^2-25}{c+5}$$

$$= \frac{(c-5)(c+5)}{c+5}$$

$$\lim_{x \to c} f(c) = c-5 \quad \text{— ②}$$

समीकरण ① व ② से,

$$f(c) = \lim_{x \to c} f(c)$$

अतः वास्तविक सं० में -5 की हीड़ने पर $f(x)$ संतत होगा।

$R-\{-5\}$ पर $f(x)$ संतत है।

प्रश्न 10 का उत्तर

$$\frac{dy}{dx} = (1+x^2)(1+y^2)$$

$$\frac{1}{(1+y^2)}\,dy = (1+x^2)\,dx$$

समाकलन करने पर

$$\int \frac{1}{(1+y^2)}\,dy = \int (1+x^2)\,dx$$

$$\tan^{-1}(y) = \int 1\,dx + \int x^2\,dx$$

$$\tan^{-1}(y) = x + \frac{x^3}{3} + C$$

$$\boxed{y = \tan\left(x + \frac{x^3}{3} + C\right)}$$

व्यापक हल है जबकि C = अचर वास्तविक सं०

P.T.O.

प्रश्न 11 का उत्तर

दी गयी रेखा

→ $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+3}{-3}$

→ $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-4}{8} = \frac{z-5}{4}$

मानक रूप

$\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1}$ से तुलना

$a_1 = 2, \quad b_1 = 5, \quad c_1 = -3$
$a_2 = -1, \quad b_2 = 8, \quad c_2 = 4$

→ $\vec{b_1} = 2\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k}$

→ $\vec{b_2} = -\hat{i} + 8\hat{j} + 4\hat{k}$

$\vec{b_1} \cdot \vec{b_2} = (2\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k}) \cdot (-\hat{i} + 8\hat{j} + 4\hat{k})$

$= -2 + 40 - 12$

$\vec{b_1} \cdot \vec{b_2} = 26 \quad — (1)$

$|\vec{b_1}| = \sqrt{(2)^2 + (5)^2 + (-3)^2}$

$= \sqrt{4 + 25 + 9}$

$= \sqrt{38}$

$$|\vec{b_2}| = \sqrt{1+64+16}$$
$$= \sqrt{81}$$
$$|\vec{b_2}| = 9$$

$$|\vec{b_1}| \cdot |\vec{b_2}| = 9\sqrt{38} \quad -(2)$$

दोनों रेखा के बीच का कोण

$$\cos\theta = \left| \frac{\vec{b_1} \cdot \vec{b_2}}{|\vec{b_1}||\vec{b_2}|} \right|$$

$$= \left| \frac{26}{9\sqrt{38}} \right|$$

कोण $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{26}{9\sqrt{38}}\right)$

प्रश्न 12 का उत्तर

पासे को एक बार उछालने पर परिणाम

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$n(S) = 6$

→ घटना E = पासे पर प्राप्त सं० 3 का अपवर्त्य है।

$E = \{3, 6\}$

$n(E) = 2$

$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{2}{6}$ $\quad P(E) = \frac{1}{3}$

P.T.O.

→ घटना F = पासे पर प्राप्त सं० सम है।

$F = \{2, 4, 6\}$

$P(F) = \frac{n(F)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ $\quad P(F) = \frac{1}{2}$

$E \cap F = \{6\}$

$P(E \cap F) = \frac{1}{6}$

$\because P(E) = \frac{1}{3}$, $P(F) = \frac{1}{2}$, $P(E \cap F) = \frac{1}{6}$

→ $P(E) \cdot P(F) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{6}$

$\boxed{P(E) \cdot P(F) = P(E \cap F)}$

E व F घटना स्वतंत्र है।

प्रश्न 13 का उत्तर

युग्मक z से z में

संबंध $R = \{(a, b) : (a - b)$ एक युग्मक है$\}$

स्वतुल्य की जाँच →

किसी भी संबंध के स्वतुल्य होने के लिये
$(a,a) \in R$ होना चाहिए।
चूँकि दिये गये संबंध की शर्त से
$a-a=0$ (एक पूर्णांक)
=
अतः $(a,a) \in R$
अर्थात् दिया गया संबंध स्वतुल्य है।

उदाहरण → $\{(1,1),(2,2),(3,3),(-1,-1),---\} \in R$

सममित की जाँच →

किसी भी संबंध के सममित होने के लिये,
यदि $(a,b) \in R$ तो $(b,a) \in R$ होना चाहिए
दिये गये संबंध की शर्त से, $(a,b) \in R$
यदि $(a-b)=x$ x = पूर्णांक
तो $(b-a)=-(a-b)=-x$ (पूर्णांक)
तो $(b,a) \in R$
दिया गया संबंध सममित है।

उदाहरण → यदि $(1,2) \in R$ $1-2=-1$ (पूर्णांक)
तो $(2,1) \in R$ $2-1=1$ पूर्णांक

P.T.O.

संक्रामक की जाँच →

यदि $(a,b) \in R$, $(b,c) \in R$

तो संबंध के संक्रमक होने के लिये ,

$(a,c) \in R$

यदि $(a,b) \in R$ तो $a-b = x$ (पूर्णांक)

$(b,c) \in R$ तो $b-c = y$ (पूर्णांक

तो निश्चित ही $(a-c)$ = पूर्णांक होगा

क्योंकि पूर्णांक में से पूर्णांक घटाने पर
पूर्णांक प्राप्त होता है

तो $(a,c) \in R$

संबंध संक्रामक भी है।

उदा० → $(1,2) \in R$, $1-2 = -1$

$(2,3) \in R$, $2-3 = -1$

तो $(1,3) \in R$ $1-3 = -2$ (पूर्णांक)

∴ संबंध स्वतुल्य सममित व संक्रामक है।
अतः R संबंध तुल्यता संबंध है।

प्रश्न 14 का उत्तर

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

→ adj A

$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 9 = 7$

$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(4-3) = -1$

$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (3-4) = -1$

$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -(12-9) = -3$

$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (4-3) = 1$

$A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 3 = 0$

$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = (9-12) = -3$

$A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 3 = 0$

$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}^1$$

$$= \begin{bmatrix} +7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

P.T.O

$$A(\text{adj}A) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 13 & 0 & 0 \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A(\text{adj}A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{— (1)}$$

$$|A| = 1\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1(7) - 1(3) + 1(-3)$$

$$= 7 - 3 - 3$$

$$|A| = 1$$

$$|A|I = 1\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A|I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{A(\text{adj}A) = |A|I}$$ proved

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}$ adj A से

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 15 का उत्तर

आयत की लं० में परिवर्तन

$\rightarrow \frac{dx}{dt} = -5 cm/min$

(घट रही है)

आयत की चौ० में परिवर्तन

$\rightarrow \frac{dy}{dt} = 4 cm/min$

परिमाप में परिवर्तन →

आयत का परिमाप $S = 2(x+y)$

$$\frac{ds}{dt} = 2\frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt}$$

$$= 2(-5) + 2(4)$$

$$= -10 + 8$$

$$\frac{ds}{dt} = -2 \text{ cm/min}$$

आयत का परिमाप 2 cm/min की दर से घट रहा है।

क्षेत्रफल में परिवर्तन →

$$A = xy$$

$$\frac{dA}{dt} = y\frac{dx}{dt} + x\frac{dy}{dt}$$

जब $x = 6\text{cm}, y = 5\text{cm}$

$$\frac{dA}{dt} = 5(-5) + 6(4)$$

$$= -25 + 24$$

$$= -1 \text{ cm}^2/\text{min}$$

आयत का क्षे० $1 \text{cm}^2/\text{min}$ की दर से घट रहा है।

प्रश्न 16 का उत्तर

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}$$

$$I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin(\pi - x)}{1 + [\cos(\pi - x)]^2}\, dx$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\pi \sin x\, dx}{1 + \cos^2 x} - \int_0^{\pi} \frac{\sin x \cdot x\, dx}{1 + \cos^2 x}$$

$$I = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx - I$$

$$2I = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx$$

$$2I = 2\pi \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx$$

$$I = \pi \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx$$

माना $\cos x = t$

$-\sin x\, dx = dt$

$\sin x\, dx = -dt$

सीमा → जब $x = 0$ तो $t = \cos 0$

$t = 1$

$x = \pi/2$ तो $t = \cos \pi/2$

$= 0$

limit = 1 से 0

$$= -\pi \int_1^0 \frac{1}{1 + t^2}\, dt$$

$$= -\pi \frac{1}{1} \left[\tan^{-1} t\right]_{1}^{0}$$

$$= -\pi \left[\tan^{-1} 0 - \tan^{-1}(1)\right]$$

$$= -\pi \left(0 - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{\pi^2}{4}$$

$$\boxed{\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx = \frac{\pi^2}{4}}$$

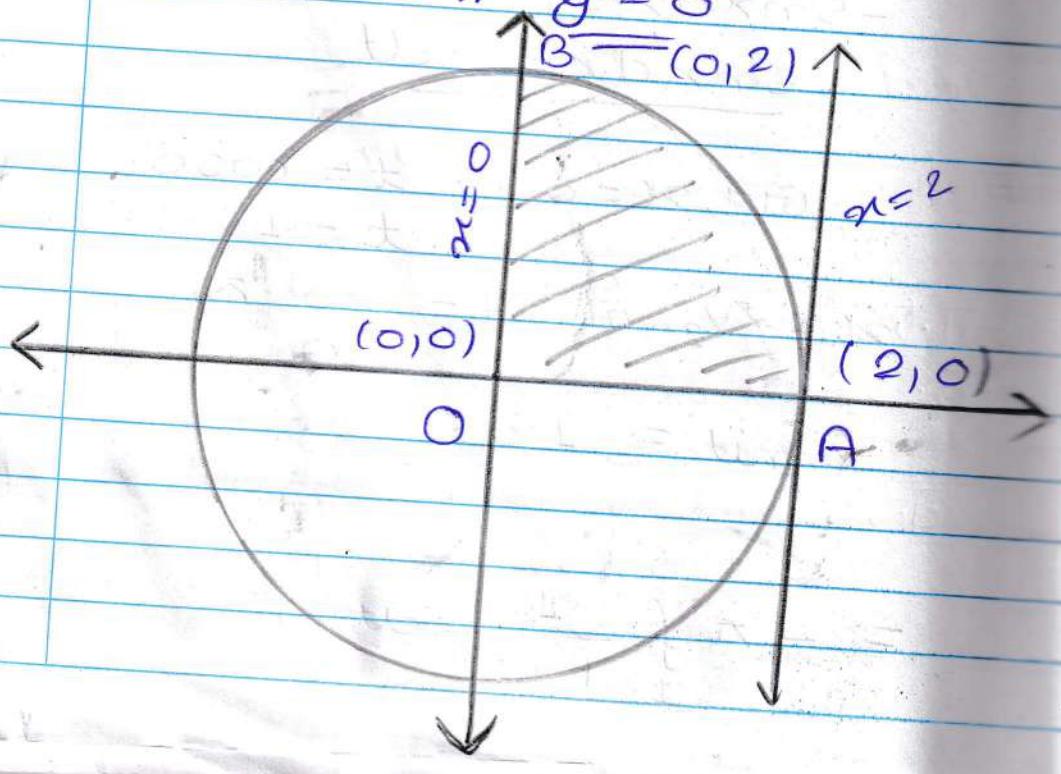
प्रश्न 17 का उत्तर

$x^2 + y^2 = 4$

$x = 0$ तो $\pm 2 = y$

$x = 1$ तो $y = \sqrt{3}$

$x = 2$ तो $y = 0$



अभीष्ट वृत्त में,

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$y = \sqrt{4 - x^2}$$

तो प्रथम चतुर्थांश में वृत्त का क्षे० रेखा $x = 0$ व $x = 2$ के बीच

$$A = \int_0^2 y \, dx$$

$$= \int_0^2 \sqrt{4 - x^2} \, dx$$

$$= \int_0^2 \sqrt{(2)^2 - (x^2)} \, dx$$

$$= \left[\frac{x}{2}\sqrt{4 - x^2} + \frac{(2)^2}{2} \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) \right]_0^2$$

$$= \left[\frac{x}{2}\sqrt{4 - x^2} + 2 \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) \right]_0^2$$

$$= \left[\frac{2}{2}\sqrt{4 - 4} + 2 \sin^{-1}(1) \right] -$$

$$\left[\frac{0}{2}\sqrt{4 - 0} + 2\sin^{-1}(0) \right]$$

$$= \left[0 + 2\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] - (0 + 0)$$

$$= \pi$$

वृत्त का क्षेत्रफल = π वर्ग इकाई

प्रश्न 18 का उत्तर

दिया है $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = \vec{0}$

$|\vec{a}| = 1, \quad |\vec{b}| = 4, \quad |\vec{c}| = 3$

$\because \quad (\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = 0$

स्वतः अदिश गुणन

$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}).(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = 0$

$|\vec{a}|^2 + \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c} + |\vec{b}|^2 + \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{a} + \vec{c}\cdot\vec{b} + |\vec{c}|^2 = 0$

$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{a} = 0$

अदिश गुणन में

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

$\vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{b}$

$\vec{a}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a}$

$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{a} + \vec{c}\cdot\vec{a} = 0$

$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 2\vec{b}\cdot\vec{c} + 2\vec{c}\cdot\vec{a} = 0$

$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2(\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{a}) = 0$$

$$(1)^2 + (4)^2 + (3)^2 + 2(\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{a}) = 0$$

$$1 + 16 + 9 + 2(\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{a}) = 0$$

$$2(\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{a}) = -26$$

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{a} = -13}$$

प्रश्न 19 का उत्तर

माना टंकी की लं॰, चौ॰, ऊँ॰ क्रमशः l, b, h है।

$h = 2m$ (गहराई)

तो $l \times b \times h$ = आयतन

$l \times b \times 2 = 8 m^3$

$l \times b = 4 m^2$

$$\boxed{b = \frac{4}{l}} \quad \text{---} (1)$$

पुनः, टंकी के आधार का क्षे॰ = $l \times b$

आधार के $1 m^2$ का व्यय = ₹70

$[(l \times b) = 4 m^2]$ का व्यय = 4×70 ₹

आधार निर्माण का व्यय = 280 ₹

दीवारों का क्षे० = घनाभाकार टंकी का वक्र पृ० क्षे०

$= 2(l+b) \times h$

$= 4(l+b)\ m^2$

$= 4\left(l + \frac{4}{l}\right) m^2$

दीवार निर्माण की लागत = 50 ₹/ m^2

लागत $= 50 \times 4\left(l + \frac{4}{l}\right)$

दीवार की लागत $= 200\left(l + \frac{4}{l}\right)$ ₹

कुल व्यय $S = 280 + 200\left(l + \frac{4}{l}\right)$

l के सापेक्ष अवकलन

$\frac{dS}{dl} = 0 + 200\left(1 - \frac{4}{l^2}\right)$

यदि $\frac{dS}{dl} = 0$

तो $200\left(1 - \frac{4}{l^2}\right) = 0$

$1 = \frac{4}{l^2}$

$l^2 = 4$

$l = 2m$ ($\because -2m$ अस्वीकृत)

तो $l \times b = 4$ से

$b = 2m$

$$\frac{d^2S}{dl^2} = 200\left(0 + \frac{8}{l^3}\right)$$

$$\frac{d^2S}{dl^2} = \frac{1600}{l^3}$$

l के धनात्मक मान के लिये $(l = 2)$

$$\frac{d^2S}{dl^2} = +ve$$

तो $l = 2$ पर लागत न्यूनतम होगी।

कुललागत $= 280 + 200\left(2 + \frac{4}{2}\right)$

$= 280 + 200(4)$

$= 280 + 800$

$= 1080$ ₹

निम्नतम खर्च से बनी टंकी की लागत $= 1080$ ₹

प्रश्न 21 का उत्तर

माना कोई रेखा l, बिंदु A, जिसका स्थिति सदिश $2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ है जाती है

तथा सदिश $\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ के समांतर है।

* रेखा का सदिश रूप →

∴ रेखा Q, बिंदु A से जाती है।

$\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$

तथा सदिश $(\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$ की दिशा में जाती है या इसके समांतर है तो

रेखा का सदिश समीकरण,

$$\vec{r} = (2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}) + \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$$

जहाँ λ = अचर नियतांक

* रेखा का कार्तीय रूप →

रेखा बिंदु A से जाती है।

$\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$

$$x_1 = 2, \quad y_1 = -1, \quad z_1 = 4$$

रेखा $\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ की दिशा में जाती है।

$a_1 = 1, \quad b_1 = 2, \quad c_1 = -1$

या

$$a = 1, \quad b = 2, \quad c = -1$$

कार्तीय रूप में रेखा का समीकरण

$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$$ से

दी गयी रेखा का कार्तीय समीकरण

$$\boxed{\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-4}{-1}}$$

रेखा का सदिश समी० →

$$\vec{r} = (2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}) + \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$$

कार्तीय समी०

$$\frac{x-2}{+1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-4}{-1}$$

प्रश्न 23 का उत्तर

माना घटना A = सही उत्तर देना

घटना E_1 = विद्यार्थी का उत्तर जानना

घटना E_2 = विद्यार्थी द्वारा उत्तर का अनुमान लगाना

$P(E_1)$ = प्रायिकता कि विद्यार्थी उत्तर जानता है।

$P(E_1) = \frac{3}{4}$

$P(E_2)$ = प्रायिकता कि विद्यार्थी उत्तर का अनुमान लगाता है।

$P(E_2) = \frac{1}{4}$

$P(A|E_1)$ = प्रायिकता विद्यार्थी ने सही उत्तर दिया जबकि वह उत्तर जानता था

$P(A|E_1) = 1$

$P(A|E_2)$ = प्रायिकता कि विद्यार्थी ने सही उत्तर दिया जबकि उसने उत्तर का अनुमान लगाया

$P(A|E_2) = \frac{1}{4}$

ज्ञात करना है।

P(विद्यार्थी का प्रश्न का उत्तर जानना जब वह सही उत्तर देता है)

$= P(E_1|A)$

बेजप्रमेय से

$$P(E_1|A) = \frac{P(E_1)\,P(A|E_1)}{P(E_1)\,P(A|E_1) + P(E_2)\,P(A|E_2)}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}(1)}{\frac{3}{4}(1) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)}$$

$$= \frac{3/4}{3/4 + 1/16}$$

$$= \frac{3/4}{\frac{12+1}{16}}$$

$$= \frac{3}{\cancel{4}} \times \frac{16^{4}}{13}$$

$$P(E_1|A) = \frac{12}{13}$$

प्रायिकता P (विद्यार्थी उत्तर जानता है जब उसने सही उत्तर दिया)

$$= \frac{12}{13}$$

प्रश्न 24 का उत्तर

दिया है)

सितंबर

	बासमती	परमल	शरबती	
A =	10000	20000	30000	रमेश
	50000	30000	10000	गुरुचरण सिंह

अक्टूबर

	बासमती	परमल	शरबती	
B =	5000	10000	25000	रमेश
	30000	20,000	10000	गुरुचरण सिंह

उत्तर (i)

सितंबर तथा अक्टूबर माह की सम्मिलित बिक्री

$$A+B = \begin{bmatrix} 10,000 & 20000 & 30000 \\ 50,000 & 30000 & 10000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5000 & 10000 & 25000 \\ 30000 & 20,000 & 10,000 \end{bmatrix}$$

बासमती परमल शरबती

$$= \begin{bmatrix} 15,000 & 30,000 & 65,000 \\ 80,000 & 50,000 & 20,000 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{रमेश} \\ \text{गुरुचरण सिंह} \end{matrix}$$

रमेश की कुल बिक्री

बासमती = 15000 ₹
परमल = 30000 ₹
शरबती = 65000 ₹

गुरूचरण सिंह की कुल बिक्री

बासमती = 80,000 ₹
परमल = 50,000 ₹
शरबती = 20,000 ₹

उत्तर (ii)

अक्टूबर माह में बिक्री में कमी

$$B - A = \begin{bmatrix} 5,000 & 10,000 & 5000 \\ 20,000 & 10,000 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{रमेश} \\ \text{गुरु चरण सिंह} \end{matrix}$$

रमेश की बिक्री में कमी

बासमती = 5000 ₹
परमल = 10,000 ₹
शरबती = 5,000 ₹

गुरूचरण सिंह की बिक्री में कमी

बासमती = 20,000 ₹
परमल = 10,000 ₹
शरबती = 0 ₹

उत्तर (iii)

अक्टूबर में बिक्री पर लाभ = 2%

$= \frac{2}{100}$

$$= \frac{2}{100}\begin{bmatrix} 5000 & 10000 & 25000 \\ 30000 & 20000 & 10000 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 100 & 200 & 500 \\ 6000 & 400 & 200 \end{bmatrix}$$

रमेश का लाभ –

बासमती = 100 ₹
परमल = 200 ₹
शरबती = 500 ₹

गुरुचरण सिंह का लाभ –

बासमती = 600 ₹
परमल = 400 ₹
शरबती = 200 ₹

प्रश्न 20 का उत्तर

$$\frac{dy}{dx} + 2y\tan x = \sin x$$

$$\frac{dy}{dx} + y(2\tan x) = \sin x$$

$\frac{dy}{dx} + Py = Q$ से तुलना

$P = 2\tan x$

$Q = \sin x$

समाकलन गुणक

$$I.F. = e^{\int P dx}$$

$$= e^{\int 2\tan x \, dx}$$

$$= e^{2\int \tan x \, dx}$$

$$\int \tan x \, dx = \log|\sec x|$$

$$= e^{2\log|\sec x|}$$

$$= e^{\log|\sec^2 x|}$$

$$I.F. = \sec^2 x$$

$$\therefore \quad y \times I.F. = \int Q \times I.F. \, dx$$

$$y \times \sec^2 x = \int \sin x \cdot \sec^2 x \, dx$$

$$y \times \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) = \int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \sec x \, dx$$

$$y \times \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) = \int \tan x \cdot \sec x \, dx$$

$$y \times \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) = \sec x + C$$

जब $y = 0, \quad x = \pi/3$

$$0 = \sec\left(\frac{\pi}{3}\right) + C$$

$$c = -\sec\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$c = -2$$

~~y cos~~

~~$y\sec^2 x = \sec x$~~

$$y\sec^2 x = \sec x - 2$$

$$\boxed{y = \cos x - 2\cos^2 x}$$

प्रश्न 22 का उत्तर

→ $x + 3y \leq 60$ का समीकरण रूप

$$x + 3y = 60$$

जब $x = 0$ तो $y = 20$

$(0, 20)$

जब $x = 30$ तो $y = 10$

$(30, 10)$

हल क्षेत्र = नीचे की ओर

(x अक्ष की ओर

उदा० = $(20, 10)$

→ $x + y \geq 10$ का समी० रूप

$x + y = 10$

$x = 0$ तो $y = 10$ $(0, 10)$

$y = 0$ तो $x = 10$ $(10, 0)$

हल क्षेत्र = ऊपर की ओर

उदा० = $(10, 20)$

$x - y \leq 0$ का समी० रूप

$x = y$

→ $x = 0$ तो $y = 0$ $(0, 0)$

$x = 10$ तो $y = 10$ $(10, 10)$

$x = 30$ तो $y = 30$ $(30, 30)$

हल क्षेत्र = ऊपर की ओर उदा० = $(10, 30)$

$x \geq 0$ में

$x = 0$

हल क्षेत्र = ऊपर

$y \geq 0$ में

$y = 0$

हल क्षेत्र = दाँयी ओर

$x+3y=60$
$x=y$ तो

$4y=60$
$(y=15)$ तो $x=15$

$x=y$ तो
$2y=10$
$y=5$
$x=5$
$(5,5)$

कोणीय बिंदु

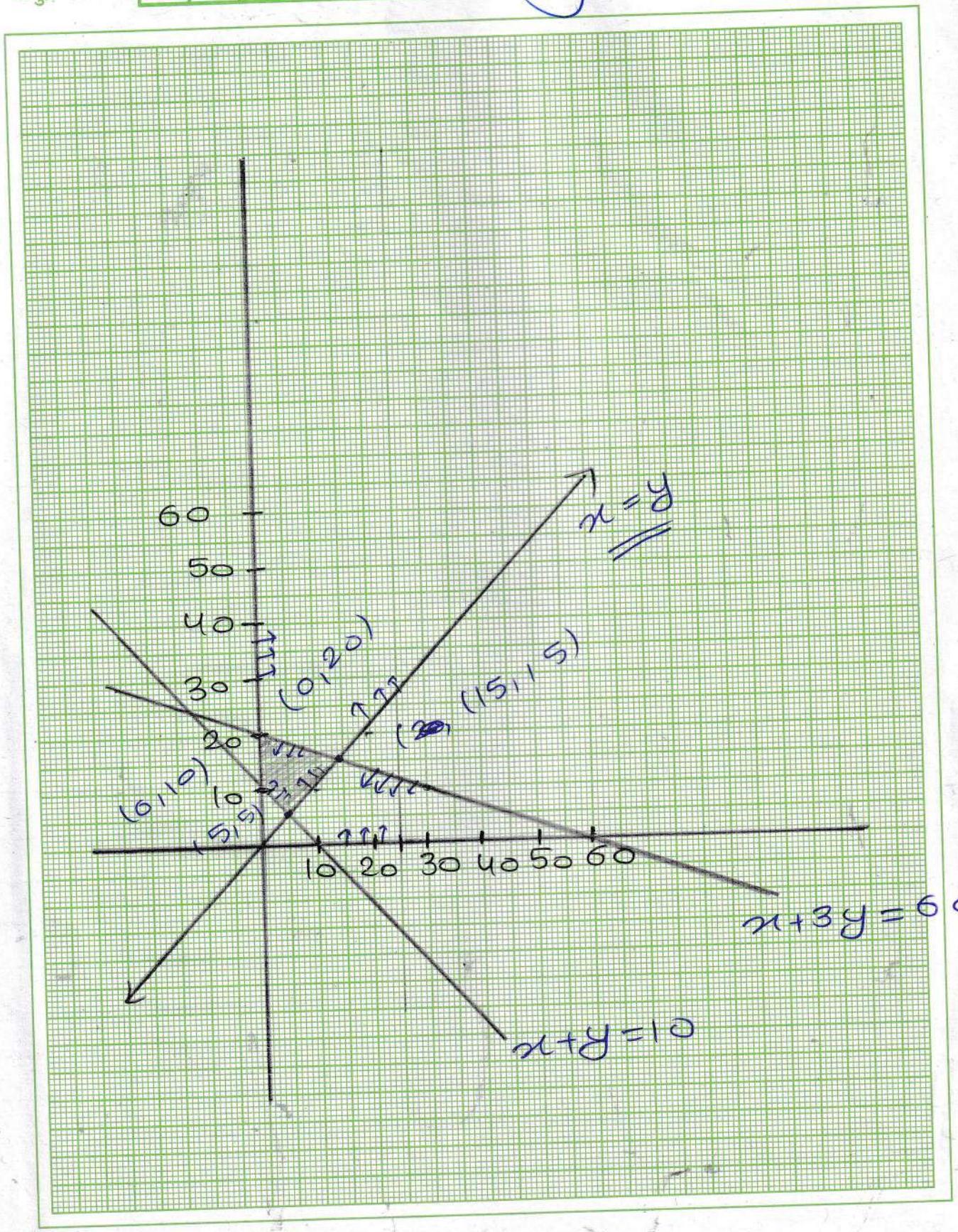
$=(5,5),(15,15),(0,10),(0,20)$

कोणीय बिंदु	$3x+2y$
$(0,20)$	~~180~~
$(0,10)$	90
$(15,15)$	180
$(5,5)$	60

$(0,20)$ व $(15,15)$ पर
अधिकतम

~~अधिकतम~~ =

Roll No.
अनुक्रमांक 2 5 3 9 7 3 6 5



कोणीय बिंदु	$Z = 3x + 9y$
(15, 15)	180
(0, 20)	180
(0, 10)	90
(5, 5)	60

अधिकतम मान = (15, 15) व (0, 20) को मिलाने वाली रेखा

न्यूनतम = (5, 5) पर

(~~15~~)

25397365